2.5.4 Inégalité de Hölder et Minkowski

2.98 THÉORÈME (INÉGALITÉ DE YOUNG GÉNÉRALISÉE)
Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ une fonction strictement croissante et de dérivée continue sur $[0, +\infty[$ et $f(0)=0$. Alors pout tous

1) pour tout $a \geq 0$ on a

$$\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^{f(a)} f^{-1}(y)\,dy = af(a)$$

2) pour tous $a,\ b \geq 0$ on a,

$$\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^{b} f^{-1}(y)\,dy \geq ab$$

De plus l'égalité à lieu si et seulement si $b = f(a)$.

Démonstration: 1) La fonction f étant strictement croissante, continue et $f(0)=0$, elle est inversible de $[0,c] \to [0, f(c)]$ et la fonction inverse est aussi strictement croissante. Par une intégration par parties, on a

$$\int_0^a f(x)\,dx = af(a) - \int_0^a xf'(x)\,dx = af(a) - \int_0^{f(a)} f^{-1}(y)\,dy$$

on a utilisé puis le changement de variable $y = f(x)$, $(\,dy = f'(x)\,dx)$.

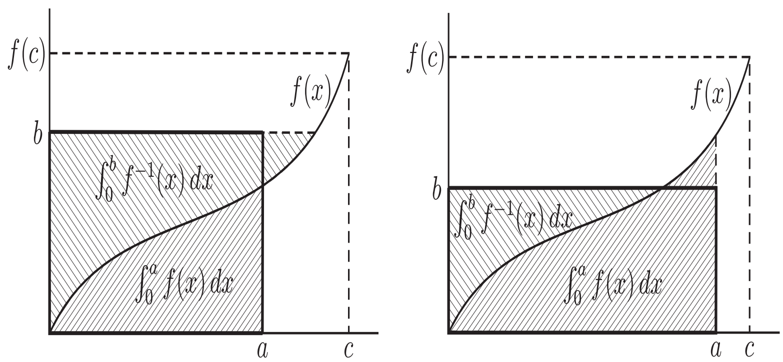

FIGURE 2 – à gauche $f(a) \leq b$ et à droite $f(a) \geq b$

2) On aura, en utilisant la relation de Chasle et 1)

$$\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(y)\,dy = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^{f(a)} f^{-1}(y)\,dy + \int_{f(a)}^b f^{-1}(y)\,dy = af(a) + \int_{f(a)}^b f^{-1}(y)\,dy$$

Maintenant, si $f(a) \leq b$, on a

$$\int_{f(a)}^b f^{-1}(y)dy \geq \int_{f(a)}^b f^{-1}(f(a))dy = \int_{f(a)}^b a dy = a(b - f(a))$$

et si $f(a) \geq b$, on a

$$\int_{f(a)}^b f^{-1}(y)dy = -\int_b^{f(a)} f^{-1}(y)dy \geq -\int_b^{f(a)} f^{-1}(f(a))dy = -\int_b^{f(a)} a dy = -a(f(a)-b) = a(b-f(a))$$

Ainsi on a

$$\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(y)\,dy = af(a) + \int_{f(a)}^b f^{-1}(y)\,dy \geq af(a) + a(b - f(a)) = ab.$$

■

2.100 COROLLAIRE (INÉGALITÉ DE YOUNG)
Soit $1 < p < \infty$, alors pour tous $a,\ b \geq 0$ on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

où $q \in]1, +\infty[$ est l'exposant conjugué à p définie par $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
De plus l'égalité a lieu si et seulement si $a^p = b^q$.

Démonstration: On applique l'inégalité de Young généralisée à $f\ :\ [0, +\infty[\to\ [0, +\infty[$, définie par $f(x) = x^{p-1}$, alors $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{p-1}}$. Ainsi, puisque $q = \frac{p}{p-1}$, on a

$$ab \leq \int_0^a x^{p-1}\,dx + \int_0^b y^{\frac{1}{p-1}}\,dy = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

■

2.102 THÉORÈME (INÉGALITÉ DE HÖLDER ET MINKOWSKI)
Soient p et q deux exposants conjugués ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), $1 \leq p \leq \infty$. Soient $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$.
Alors on a les inégalités suivantes :

(i) (l'inégalités de Hölder).

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q}.$$

(ii) (l'inégalité de Minkowski).

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Démonstration: (i) a) Si $\int_a^b |f(x)|^p\,dx = \int_a^b |g(x)|^q\,dx = 1$, d'après l'inégalité de Young on a : pour tout $x \in [a, b]$, $|f(x)g(x)| \leq \dfrac{|f(x)|^p}{p} + \dfrac{|g(x)|^q}{q}$ par suite

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \frac{1}{p}\int_a^b |f(x)|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_a^b |g(x)|^q\,dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

b) Si $\int_a^b |f(x)|\,dx = 0$ ou $\int_a^b |g(x)|\,dx = 0$, alors $\int_a^b |fg|dx = 0$ et l'égalité.

c) Si $\int_a^b |f(x)|^p\,dx > 0$ et $\int_a^b |g(x)|^q\,dx > 0$, on pose $f_1 = \frac{f}{\left(\int_a^b |f|^p\,dx\right)^{1/p}}$ et $g_1 = \frac{g}{\left(\int_a^b |g|^q\,dx\right)^{1/q}}$. Alors $\left(\int_a^b |f_1(x)|^p\,dx\right)^{1/p} = \left(\int_a^b |g_1(x)|^p\,dx\right)^{1/p} = 1$ et d'après a) on a $\int_a^b |f_1(x)g_1(x)|\,dx \leq 1$, d'où

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q}.$$

(ii) Soient f et g deux fonctions mesurables. D'après l'inégalité de Hölder

$$\int_a^b |f+g|^p\,dx = \int_a^b |f+g||f+g|^{p-1}dx \leq \int_a^b |f||f+g|^{p-1}dx + \int_a^b |g||f+g|^{p-1}dx$$

$$\leq \left(\int_a^b |f|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |f+g|^p\,dx\right)^{1/q} + \left(\int_a^b |g|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |f+g|^p\,dx\right)^{1/q}$$

$$\leq \left[\left(\int_a^b |f|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p\,dx\right)^{1/p}\right] \left(\int_a^b |f+g|^p\,dx\right)^{1/q}$$

$$\left(\int_a^b |f+g|^p\,dx\right)^{1-1/q} \leq \left(\int_a^b |f|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

D'où l'inégalité de Minkowski. ■

2.5.5 Intégration de fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On considère une fonction f définie sur $[a,\ b] \to \mathbb{C}$. On peut donc écrire pout tout $x \in [a,b]$

$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x),$$

où $\operatorname{Re} f(x)$ et $\operatorname{Im} f(x)$ sont respectivement les parties réelles et imaginaires de $f(x)$.

Une propriété vérifiée par les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, s'étend aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, en disant que f vérifie la propriété si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ vérifient la propiété.

2.104 EXEMPLE. 1) La fonction f possède une limite finie en un point x_0 si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ possèdent une limite en x_0, et l'on pose

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \operatorname{Re} f(x) + i \lim_{x\to x_0} \operatorname{Im} f(x).$$

On vérifie facilement que les propriétés des limites de somme de produit et de quotients sont encore vraies.

2) La fonction f est continue en un point c si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont continues en x_0.

3) La fonction f est dérivable en un point c si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont dérivables en x_0, et l'on pose

$$f'(x_0) = (\operatorname{Re} f)'(x_0) + i(\operatorname{Im} f)'(x_0).$$

4) La fonction f est bornée sur $[a,\ b]$ si et seulement si les fonctions $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont bornées.

En effet on déduit de l'égalité

$$|f| = \sqrt{(\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2},$$

que la fonction $|f|$ est bornée, et des inégalités

$|\operatorname{Re} f| \leq |f|$ et $|\operatorname{Im} f| \leq |f|$, la réciproque.

On peut définir l'intégrabilité au sens de Riemann des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

2.105 DÉFINITION
Soit $f[a,\ b] \to \mathbb{C}$. On dit que f est Riemann-intégrable, si Re f et Im f le sont, et on posera

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x)dx + i\int_a^b \operatorname{Im} f(x)dx.$$

On note par $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{C})$ l'ensemble des fonction Riemann-intégrables de $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

2.106 REMARQUE
On a

$$\operatorname{Re}\left(\int_a^b f(x)dx\right) = \int_a^b \operatorname{Re} f(x)dx \text{ et } \operatorname{Im}\left(\int_a^b f(x)dx\right) = \int_a^b \operatorname{Im} f(x)dx.$$

2.107 EXEMPLE. La fonction $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ définie par $f(x) = e^{i\pi x}$ est Riemann-intégrable, puisque sa partie réelle Re $f(x) = \cos(\pi x)$ et sa partie imaginaire Im $f(x) = \sin(\pi x)$ sont continues, dont Riemann-intégrales et

$$\int_0^1 e^{i\pi x}dx = \int_0^1 \cos(\pi x)dx + i\int_0^1 \sin(\pi x)dx = \frac{2i}{\pi}$$

On va voir quelles sont les propriétés obtenues pour les fonctions à valeurs réelles qui sont encore vraies dans le cas des fonctions à valeurs complexes.

2.5.6 Propriétés de l'intégrale des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

1) $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel sur et l'intégrale est une application $\mathbb{C}$-linéaire.

En effet, soient $f, g \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{C})$ g et si λ est un nombre complexe, alors $f+g$ et λf sont Riemann-intégrables, et

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\ ;\ \int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx.$$

Alors

$$\operatorname{Re}\,(f+g) \ = \operatorname{Re} f + \operatorname{Re} g\ ;\ \operatorname{Im}\,(f+g) \ = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g,$$

et ces deux fonctions sont réelles et Riemann-intégrables, donc $f+g \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{C})$.

et

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g)(x)dx(f+g) \ &= \int_a^b \operatorname{Re}\,(f+g)(x)dx + i\int_a^b \operatorname{Im}\,(f+g)x)dx.\\ &= \int_a^b \operatorname{Re} f(x)dx + \int_a^b \operatorname{Re} g(x)dx + i\int_a^b \operatorname{Im} f(x)dx + i\int_a^b \operatorname{Im} g(x)dx.\\ &= \int_a^b \operatorname{Re} f(x)dx + i\int_a^b \operatorname{Im} f(x)dx + \int_a^b \operatorname{Re} g(x)dx + i\int_a^b \operatorname{Im} g(x)dx.\\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.\end{aligned}$$

De même si $\lambda = \alpha + i\beta$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a Re $(\lambda f) = \alpha$ Re $f - \beta$ Im f et Im $(\lambda f) = \beta$ Re $f + \alpha$ Im f, d'où $\lambda f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{C})$.

De plus

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \int_a^b \alpha\, \mathrm{Re} f(x)\, dx - \int_a^b \beta\, \mathrm{Im} f(x)\, dx + i\left(\int_a^b \beta\, \mathrm{Re} f(x)\, dx + \int_a^b \alpha\, \mathrm{Im} f(x)\, dx\right)$$

$$= \alpha \int_a^b \mathrm{Re} f(x)\, dx - \beta \int_a^b \mathrm{Im} f(x)\, dx + i\beta \int_a^b \mathrm{Re} f(x)\, dx + i\alpha \int_a^b \mathrm{Im} f(x)\, dx$$

$$= (\alpha + i\beta)\left(\int_a^b \mathrm{Re} f(x) dx + \int_a^b \mathrm{Im} f(x)\, dx\right) = \lambda \int_a^b f(x)\, dx.$$

2) Toutes les propriétés faisant appel à la linéarité de l'intégrale restent vraies. Il suffit d'appliquer les propriétés pour les fonctions réelles aux parties réelles et imaginaires : par exemple
la relation de Chasles, le théorème fondamental du cacul intégral, la formule d'intégration par parties, la formule de changement de variable ...

3) Soit $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{C})$, alors $|f| \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{C})$ et $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.
Ecrivons $f = u + iv$ avec $u = \mathrm{Re} f$ et $v = \mathrm{Im} f$.
Commençons par montrer que $|f|$ est Riemann-intégrable.
Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une subdivision $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b\}$ de $[a,b]$ telle que $D_+(u,\sigma) - D_-(u,\sigma) \leq \frac{\epsilon}{2}$ et $D_+(u,\sigma) - D_-(u,\sigma) \leq \frac{\epsilon}{2}$.
Par l'inégalité triangulaire, pour tous $x, x' \in [a,b]$, on a :

$$\left||f(x)| - |f(x')|\right| \leq \left|f(x) - f(x')\right| \leq \left|u(x) - u(x')\right| + \left|v(x) - v(x')\right|$$

ainsi, pour tous $x, x' \in [x_i, x_{i+1}]$ on a

$$\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} |f(x)| - \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} |f(x)| \leq \left(\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} u(x) - \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} u(x)\right) + \left(\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} v(x) - \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} v(x)\right)$$

en remarquant que $\sup_{x,x'\in[x_i,x_{i+1}]} \left||f(x)| - |f(x')|\right| = \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} |f(x)| - \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} |f(x)|$
on obtient l'intégrabilité de $|f|$ de

$$D_+(|f|,\sigma) - D_-(|f|,\sigma) \leq (D_+(u,\sigma) - D_-(u,\sigma)) + (D_+(v,\sigma) - D_-(v,\sigma)) \leq \epsilon$$

Montrons maintenant l'négalité.
Posons $\int_a^b f(x)\, dx = re^{i\theta}$ où $r = \left|\int_a^b f(x)\, dx\right|$ et θ est un réel.
Alors,

$$r = \mathrm{Re}(r) = \mathrm{Re} \int_a^b e^{-i\theta} f(x)\, dx = \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\theta} f(x))\, dx \tag{2.1}$$

D'autre part, $\mathrm{Re}(e^{-i\theta} f(x)) \leq |e^{-i\theta} f(x)| = |f(x)|$, d'où $\int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\theta} f(x))\, dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$, par suite

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| = r \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

2.5.7 Critère de Lebesgue pour l'intégrabilité au sens de Riemann

On note $\mu(I)$ la longueur de l'intervalle I, ($\mu([a,b]) = b - a$).

Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est dit **de mesure nulle**, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe une famille dénombrable $\mathcal{H} = \{I_0,\ I_1,\ \ldots\}$ d'intervalles ouverts telle que

$A \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} \mu(I_k) \leq \epsilon$.

2.108 LEMME
1) Si B est de mesure nulle et $A \subset B$ alors A est aussi de mesure nulle.
2) Tout sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$ est de mesure nulle.
3) Si A_k est de mesure nulle pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ est aussi de mesure nulle.

Démonstration: 1) C'est clair
2) Soit $A = \{a_0, a_1, \dots\}$ un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$. Soit $\epsilon > 0$, et pout tout k, soit I_k l'intervalle $]a - \frac{\epsilon}{2^{k+2}}, a + \frac{\epsilon}{2^{k+2}}[$. Alors, $A \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$. Pour tout k, la mesure de I_k est $\frac{\epsilon}{2^k}$, d'où $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(I_k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\epsilon}{2^{k+1}} = \epsilon$. D'où, A est de mesure nulle.
3) Soit $\epsilon > 0$. Pour tout k, soit $\mathcal{H}_k = \{I_{k,0}, I_{k,1}, \dots\}$ une famille d'énombrable d'intervalles telle que
$A_k \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_{k,i}$ et $\sum_{i=0}^{+\infty} \mu(I_{k,i}) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$. Alors, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_k$ est encore une famille dénombrable d'intervalles, et
$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_{k,i}$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} \mu(I_{k,i}) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\epsilon}{2^{k+1}} = \epsilon$. ■

2.110 EXEMPLE. 1) Tout ensemble fini est de mesure nulle.
2) Les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ et l'ensemble des nombres algébriques sont de mesure nulle car ils sont dénombrables.

Il existe des ensembles qui sont de mesure nulle sans être dénombrale, l'ensemble triadique de Cantor en est un.

2.111 EXEMPLE (L'ENSEMBLE TRIADIQUE DE CANTOR). La construction de l'ensemble de Cantor est se fait par récurrence comme suit :

On découpe $[0,1]$ en trois intervalles égaux et l'on supprime l'intervalle ouvert du milieu, on fait de même aux deux intervalles restant, ainsi de suite. On obtient ainsi pour les premiers ensembles $C_0 = [0,1], C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right], C_3 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$;

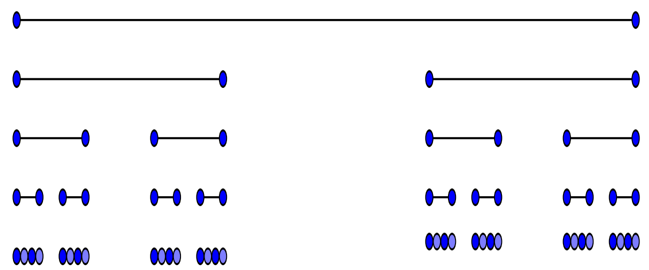

FIGURE 3 – les 4 première étapes de la construction de C

C_n est obtenu à partir de C_{n-1} en supprimant 2^{n-1} intervalles ouverts deux à deux disjoints de longueur $\frac{1}{3^n}$. Plus precisément C_n est la réunion des 2^n intervalles disjoints

de longueur $\frac{1}{3^n}$, $\left[\frac{a}{3^n}, \frac{a+1}{3^n}\right]$ où a parcours l'ensemble des entiers de la forme $a = \sum_{k=1}^{n} a_k 3^k$ avec $a_k = 0$ ou $a_k = 2$.
L'ensemble triadique de Cantor C est défini comme l'intersection des ensemble C_n

$$C := \bigcap_{n=0}^{+\infty} C_n.$$

1) **L'ensemble C n'est pas dénombrable :**
Pour montrer cela, on utilise une autre description de C ; c'est l'ensemble des réels $x \in [0,1]$ donc l'écriture en base 3 n'utilise que 0 et 2 i.e.

$$C = \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{3^k} \,|a_k \in \{0,2\} \right\}$$

Soit $\varphi : C \to [0,1]$ l'application définie par

$$\varphi\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{3^k}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{a_k}{2}\right)}{3^k}.$$

Montrons que φ est surjective. Soit $y \in [0,1]$ et $y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{3^n}$ son écriture en base 2, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \in \{0,1\}$. Alors $\varphi(x) = y$ où $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2b_n}{3^n} \in C$.

Puisque φ est surjective, le cardinal de C est supérieur à celui de $[0,1]$, mais comme C est un sous-ensemble de $[0,1]$, son cardinal est inférieur à celui de $[0,1]$. Ainsi le cardinal de C est égal à celui de $[0,1]$; l'ensemble C n'est donc pas dénombrable.

2) **L'ensemble C est de mesure nulle :**
Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{\epsilon}{2}$.

On a C_n qui est la réunion de 2^n intervalles disjoints de la forme $\left[\frac{a}{3^n}, \frac{a+1}{3^n}\right]$ il est donc contenu dans la réunion des 2^n intervalles ouverts disjoints de la forme $\left]\frac{a}{3^n} - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}, \frac{a+1}{3^n} + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}\right[$ dont la somme des longueurs est égale à $2^n\left(\frac{1}{3^n} + \frac{\epsilon}{2^n}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.

Puisque $C \subset C_n$, il est donc contenue d'une famille finie d'intervalles ouverts dont la somme des longueurs $\leq \epsilon$. On a donc montrer que C est de mesure nule.

On énonce maintenant, le critère de Lebesgue pour l'intégrabilité au sens de Riemann :

2.112 THÉORÈME (CRITÈRE D'INTÉGRABILITÉ DE LEBESGUE)
Soit $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$. Alors, f est Riemann-intégrable si et seulement si f est bornée et l'ensemble de ses points de discontinuité est de mesure nulle.

2.113 EXEMPLE. 1) On montre facilement, en utilisant le critère de Lebesgue, que la fonction de Dirichlet, $f : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \text{ est rationnel} \\ 0 \text{ si } x \text{ est irrationnel} \end{cases}$
n'est pas Riemann-intégrable ; en effet l'ensemble de ses points de discontinuité est $[0,1]$, qui n'est pas de mesure nulle.

2) La modification de la fonction précédente, $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel} \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ et pgcd}(p,q) = 1 \end{cases}$$

est Riemann intégrable, car elle est bornée et son ensemble de points de discontinuité est dénombrable, donc de mesure nulle :

2.114 Exercice Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de g est $]0,1] \cap \mathbb{Q}$.

Une application de ce théorème

2.115 Proposition

Soit $f : [a, b] \to [c, d]$ une fonction Riemann-intégrable et $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $g \circ f$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Démonstration: La fonction g étant continue sur l'intervalle fermé borné $[c,d]$ elle est bornée, il en est alors de même pour $g \circ f$.

Comme g est continue, $g \circ f$ est alors continue en tout point où f est continue, ainsi l'ensemble de discontinuité de $g \circ f$ est contenu dans celui de f, mais, l'ensemble de discontinuité de f est de mesure nulle, puisque $f \in \mathcal{R}([a,b])$, ainsi l'ensemble de discontinuité de $g \circ f$ est de mesure nulle. Alors, d'après le critère de Lebesgue, $g \circ f$ est Riemann-integrable sur $[a,b]$. ■